

PEMODELAN MATEMATIKA UNTUK JAM AIR JENIS *POLYVASCULAR CLEPSYDRA* DENGAN KASUS *VISCOSITY DOMINATED*

Linda Maria Evi Dewi¹ dan Widowati²
^{1,2}Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275
linda_m_e_d@yahoo.co.id
wiwied_mathundip@yahoo.com

Abstract. The principle_work of *polyvascular clepsydra* water clocks is to make the constant flow on the last vessel. A *viscosity dominated* case can influence a liquid flow in this *clepsydra*, beside the number of the vessel which build this *clepsydra*, will influence a constant flow duration. The increasing the number of the vessel will increase the duration of the constant flow. A case study at PT Tirta Sidatama is given to verify the principle_work of this *clepsydra*.

Keywords: *Polyvascular clepsydra*, prinsip kerja, aliran konstan, jam air.

1. PENDAHULUAN

Pada masa millennium seperti sekarang, banyak alat-alat canggih yang telah ditemukan dan mengalami perkembangan pesat, seperti komputer, laptop, pesawat terbang, pesawat telepon, jam dan lain sebagainya.

Jam merupakan salah satu alat yang penting untuk kehidupan manusia. Hal ini dikarenakan jam adalah suatu alat yang dipakai untuk menghitung waktu, dan tentunya setiap manusia memperhitungkan waktu dalam melewatinya.

Pada masa sebelum Masehi, bangsa Mesir menggunakan matahari sebagai alat penunjuk waktu. Pada perkembangannya manusia kemudian menemukan jam air atau disebut juga *clepsydra*. Jenis jam air ini merupakan alat penunjuk waktu pertama yang tidak menggunakan sinar matahari. Manusia kemudian mulai menemukan jam mekanik. Jenis jam ini pertama kali dikembangkan di Eropa. Jenis jam yang ditemukan selanjutnya adalah jam atom. Salah satu jam jenis ini adalah jam NIST F-1 yang diciptakan oleh National Institute of Science and Technology (NIST), di Boulder, Colorado. Jam atom ini sampai sekarang dijadikan sebagai standard frekuensi perhitungan waktu di dunia.

Di sini penulis mengulas jam air dan ingin mencari prinsip kerja jam air serta memodelkan aliran air yang keluar dari bejana dalam suatu model matematika.

Penulis bukan ingin menggunakan lagi jam air sebagai alat penunjuk waktu tetapi ingin mengkaji tentang prinsip kerja sebuah jam air dan mengaplikasikan prinsip kerja jam air tersebut dalam permasalahan nyata, yaitu pada perusahaan air minum PT Sidatama. PT Sidatama merupakan perusahaan yang memproduksi air minum murni dengan sistem Reverse Osmosis (RO).

2. HUKUM POISSEUILLE

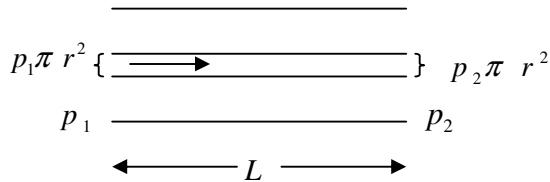
Viscositas merupakan ukuran gesekan di bagian dalam suatu fluida [15]. Fluida sebenarnya terdiri atas beberapa lapisan, karena adanya viscositas diperlukan gaya untuk meluncurkan satu lapisan fluida di atas lapisan fluida yang lain.

Misalkan dalam sepotong pipa yang radius dalamnya R dan panjangnya L mengalir fluida yang viscositasnya η . Sebuah silinder kecil beradius r berada dalam kesetimbangan bergerak dalam kecepatan konstan. Hal ini disebabkan gaya dorong yang timbul akibat perbedaan tekanan antara ujung-ujung silinder itu

serta gaya kekentalan yang menekan pada permukaan luar. Gaya dorong ini adalah,

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 \quad (1)$$

berikut akan ditunjukkan gambar gaya terhadap seunsur fluida kental.



Gambar 2. Gaya Terhadap Seunsur Silindris Fluida Kental

Mengingat kembali efek viscositas, gaya kekentalan dirumuskan sebagai,

$$-\eta A \frac{dv}{dr} = -\eta \cdot 2\pi r L \cdot \frac{dv}{dr} \quad (2)$$

dengan $\frac{dv}{dr}$ adalah gradien kecepatan pada jarak radial r dari sumbu. Tanda negatif diberikan karena v berkurang bila r bertambah.

Selanjutnya persamaan (2) diintegrasikan untuk memperoleh persamaan untuk kecepatan v^* , yaitu

$$-\int_{v^*}^0 dv = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \int_{r^*}^R r dr$$

$$v^* = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - (r^*)^2) \quad (3)$$

dengan r^* adalah suatu nilai r tertentu pada suatu nilai v^* tertentu pula.

Untuk jari-jari silinder dalam pipa mendatar yang masih berubah-ubah, maka kecepatan aliran fluida dalam pipa juga akan berubah mengikuti perubahan jari-jari. Dalam hal ini semakin besar jari-jari silinder dalam pipa, maka akan semakin kecil kecil kecepatan aliran fluidanya.

Sehingga persamaan (3) dapat dituliskan sebagai berikut,

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - (r)^2) \quad (4)$$

Untuk menghitung kecepatan pengosongan q atau volume fluida yang melewati sebarang penampang pipa persatuan waktu dapat diuraikan sebagai berikut. Volume fluida dV yang melewati ujung-ujung unsur ini waktu dt ialah $v dA dt$, dengan v adalah kecepatan pada radius r dan dA ialah luas penampang melintang pipa. Dengan mengambil rumusan v dari persamaan (4) dan $dA = 2\pi r dr$. Dalam persamaan (4) nilai r^* masih dapat berubah-ubah, oleh karena itu $r^* = r$, sehingga diperoleh,

$$dV = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) 2\pi r dr dt$$

Volume yang mengalir melewati seluruh penampang lintang diperoleh dengan mengintegrasikan seluruh unsur antara $r = 0$ dan $r = R$.

$$q = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{p_1 - p_2}{L} \quad (5)$$

Rumus ini pertama kali dirumuskan oleh Poisseuille dan dinamakan hukum Poisseuille. [15].

3. JAM AIR JENIS POLYVASCULAR CLEPSYDRA

Tipe paling sederhana dari jam air disebut *outflow clepsydra*. Dimana air dalam bejana tersebut mengalir keluar melalui sebuah pipa yang melekat di dindingnya. Salah satu *clepsydra* yang tertua adalah *clepsydra* jenis ini [8].

Jenis lain lagi adalah *inflow clepsydra*. Pengukuran waktu didasarkan pada ketinggian air yang mengalir masuk ke dalam sebuah bejana. *Inflow clepsydra* ini yang dulu digunakan oleh orang Yunani untuk mengukur waktu.

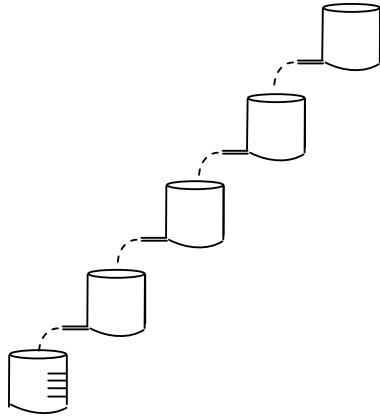
Ada variasi lain dari jenis *inflow clepsydra* yaitu *sinking bowl clepsydra*. *Inflow clepsydra* ini berbentuk mangkuk dengan lubang didasarnya. *Sinking bowl* ini ditemukan di India sekitar 400 M.

Karena adanya masalah dengan aliran air yang tidak tetap, para insinyur Cina menemukan jenis *polyvascular clepsydra*.

Solusi lain dari masalah laju air ini adalah menggunakan suatu pelampung dalam overflow tank yang berfungsi sebagai stopcock (keran). Pelampung ini mencegah masuknya air apabila ketinggian air meningkat. Begitu pula sebaliknya membiarkan air masuk apabila ketinggian air menurun.

4. MODEL MATEMATIKA

Misal terdapat bejana sejumlah N yang membentuk *polyvascular clepsydra*. Pada dinding masing-masing bejana pada bagian dasarnya melekat sebuah pipa yang berfungsi untuk mengalirkan air. Mula-mula seluruh bejana penuh terisi air. Selain itu diberikan pula sebuah bejana penampung yang pada awalnya kosong. Bejana-bejana tersebut dirangkai seperti pada Gambar 3,



Gambar 3. Rangkaian *Polyvaskular Clepsydra* dengan N Bejana

Misalkan $y_i(t)$ adalah ketinggian air pada bejana i pada saat t . Karena mula-mula bejana dalam keadaan penuh, di-misalkan ketinggian air mula-mula ($t=0$) adalah 1 satuan tinggi.

Karena bejana berbentuk silinder maka volume air di dalam bejana adalah luas alas dikalikan tinggi air dalam bejana.

$$V = \{\pi R_B^2 y_i(t)\}$$

dengan:

V : Volume dalam bejana

R_B : Jari-jari bejana

Dalam bejana, debit air dipengaruhi oleh volume air dan berapa lama waktu yang diperlukan untuk mengalirkan volume air tersebut. Debit air yang meninggalkan bejana dapat dihitung dengan,

$$q = \pi R_B^2 \frac{dy_i(t)}{dt} \quad (6)$$

dengan hukum konservasi massa debit air yang meninggalkan pipa sama dengan debit air yang memasuki bejana dikurangi debit air yang meninggalkan bejana.

Untuk bejana pertama karena tidak ada debit air yang memasuki bejana 1 maka persamaan untuk bejana 1 dinyatakan seperti pada persamaan (7),

$$\pi R_B^2 \frac{dy_1(t)}{dt} = -\frac{\pi r_p^4 \rho g}{8\eta L} y_1(t)$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -\frac{\pi r_p^4 \rho g}{8 \pi R_B^2 \eta L} y_1(t) \quad (7)$$

sedangkan bejana dua dan seterusnya sampai bejana ke N persamaannya dinyatakan seperti pada persamaan (8),

$$\pi R_B^2 \frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{\pi r_p^4 \rho g}{8\eta L} y_1(t) - \frac{\pi r_p^4 \rho g}{8\eta L} y_2(t) \quad (8)$$

misalkan $s = \frac{\pi r_p^4 \rho g}{8 \pi R_B^2 \eta L}$, persamaan (7)

dan (8) dapat ditulis dalam persamaan (9) dan (10),

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -s y_1(t) \quad (9)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = s y_1(t) - s y_2(t) \quad (10)$$

Syarat batas untuk persamaan (9) dan (10) adalah $y_i(0) = 1, i = 1, 2, \dots, N$

Persamaan (9) dapat diselesaikan secara langsung dan diperoleh solusi sebagai berikut,

$$y_1(t) = e^{-s t}$$

Persamaan (10) merupakan persamaan differensial biasa. Dapat diselesaikan

dengan menggunakan faktor integral $e^{\int s dt}$ sehingga diperoleh solusi sebagai berikut,

$$y_2(t) = (1 + s t) e^{-s t}$$

$$y_3(t) = e^{-s t} \left(1 + s t + \frac{s^2 t^2}{2} \right)$$

dengan menggunakan induksi matematika diperoleh solusi untuk $y_N(t)$ adalah sebagai berikut,

$$y_N(t) = \left(1 + s t + \frac{(s t)^2}{2!} + \frac{(s t)^3}{3!} + \dots + \frac{(s t)^{N-1}}{(N-1)!} \right) e^{-s t}$$

Solusi dari $y_N(t)$ ini dapat pula dituliskan sebagai,

$$y_N(t) = \left(e^{s t} - \sum_{m=N}^{\infty} \frac{(s t)^m}{m!} \right) e^{-s t}$$

dapat disederhanakan menjadi,

$$y_N(t) = 1 - e^{-s t} \sum_{m=N}^{\infty} \frac{s t^m}{m!}$$

Lemma [8]: Jika $\frac{t^N}{N!} = c > 0$, maka

$$t > \frac{N c^{\frac{1}{N}}}{e}$$

Lemma di atas memberikan jaminan berapa lama waktu yang dibutuhkan agar air mencapai ketinggian tertentu.

5. ANALISA KESTABILAN MODEL

Persamaan (9) dan (10) dapat dimisalkan menjadi,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -s y_1 \\ \dot{y}_i &= s y_{i-1} - s y_i, \quad (11) \\ &\text{untuk } 2 \leq i \leq N \end{aligned}$$

Persamaan (11) ini dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{N-1} \\ \dot{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s & -s & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -s & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan analisa kestabilan Liapunov dapat ditentukan kestabilan dari sistem di atas asalkan nilai s diketahui.

6. STUDI KASUS

Pada bagian ini akan dibahas studi kasus pada perusahaan air minum PT Sidatama. PT Sidatama adalah perusahaan yang memproduksi air minum murni dengan sistem Reverse Osmosis (RO).

Perusahaan ini memproduksi air minum dengan merk be's. Air minum be's diproduksi dalam bentuk air minum cup dan galon. Dalam studi kasus ini akan dibahas produksi air minum be's dalam bentuk cup.

Dalam pengisian air ke dalam cup – cup perusahaan menggunakan satu buah tangki dengan dua buah kran otomatis yang mengalirkan air masuk dan keluar tangki. Kran di bawah tangki berguna untuk mengatur volume air yang masuk ke dalam cup, sedangkan kran di atas tangki berguna untuk mengatur ketinggian air dalam tangki. Hal ini dikarenakan, aliran keluar dari tangki harus konstan. Aliran konstan ini diperoleh jika ketinggian air dalam tangki konstan.

Data dari perusahaan tentang tangki tempat penampung air adalah sebagai berikut:

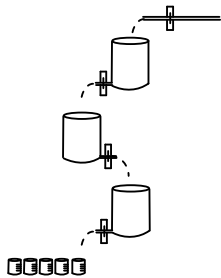
- Tangki yang dipergunakan berbentuk silinder dengan diameter 30 cm dan tinggi 40 cm.
- Pipa tempat mengalirnya air dari masing-masing tangki melekat pada bagian dasar tangki dengan panjang 30 cm dan diameternya 2,25 cm.

Karena perusahaan hanya menggunakan satu tangki, maka aliran konstan hanya terjadi sebentar. Hal ini mengakibatkan kran di atas tangki membuka dan menutup dalam frekuensi tinggi. Akibatnya kran ini cepat rusak. Oleh karena itu perusahaan ini agar aliran konstan lebih lama. Dimaksudkan agar kran pada bagian atas tangki lebih awet.

Perusahaan menganggap aliran air konstan mulai dari tangki penuh hingga ketinggian 38 cm. Oleh karena itu

perusahaan ingin mengetahui berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk mencapai ketinggian 38 cm. Waktu yang diperoleh akan digunakan untuk dimasukkan dalam program komputer guna membuka dan menutup kran otomatis.

Agar ketinggian air konstan dalam waktu yang lebih lama maka perusahaan harus menambah jumlah tangki dan menyusunnya seperti rangkaian *polyvascular clepsydra*. Berdasarkan prinsip kerja *polyvascular clepsydra*, semakin banyak tangki yang digunakan maka semakin lama aliran konstannya. Namun karena keterbatasan ruang, perusahaan hanya bisa menyusun 3 buah tangki.



Gambar 4. Rangkaian Tiga Tangki dengan Kran Otomatis

Karena pipa tempat mengalirnya air kecil maka terdapat kasus *viscosity dominated*. Oleh karena itu untuk mencari tahu berapa lama aliran konstan dapat digunakan model jam air jenis *polyvascular clepsydra* kasus *viscosity dominated*. Misalkan,

$y_i(t)$: ketinggian air pada tangki ke - i
untuk $i = 1, 2, 3$

Model matematika seperti yang telah diperoleh pada bagian sebelumnya adalah sebagai berikut,

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = -s y_1(t) \quad (12)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = s y_1(t) - s y_2(t) \quad (13)$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = s y_2(t) - s y_3(t) \quad (14)$$

Sebelumnya akan dihitung besarnya s terlebih dahulu.

$$s = \frac{r_p^4 \rho g}{8 R_B^2 \eta L}$$

$$s = \frac{(0,01125)^4 (1000)(9,8)}{8 (0,15)^2 (10^{-3})(0,3)}$$

maka

$$s = 2,90698$$

apabila diselesaikan akan diperoleh besarnya $y_1(t)$ adalah sebagai berikut,

$$y_1(t) = e^{-2,90698 t}$$

Model ketinggian air pada tangki kedua sebagai berikut,

$$y_2(t) = (30 + 87,2904 t) e^{-2,90698 t}$$

Selanjutnya model perubahan ketinggian air pada tangki ketiga.

$$y_3(t) = e^{-2,90698 t} \left(30 + 87,2904 t + 253,9871 \frac{t^2}{2} \right)$$

Mencari berapa waktu yang dibutuhkan agar air mencapai ketinggian 38 cm dapat digunakan Lemma.

Akan dicari terlebih dahulu kapan

$$y_3(t) = 38.$$

Berdasarkan Lemma jika $\frac{(2,90698 t)^3}{3!} = 2$

$$\text{maka } 2,90698 t > \frac{3(2)^{\frac{1}{3}}}{e}$$

Diperoleh $2,90698 t > 1,390$ atau
 $t > 0,447$

$$\text{maka diperoleh } t = \frac{3!(2)^{\frac{1}{3}}}{2,90698 e} \quad \text{atau}$$

$$t = 0,477$$

Analisa kestabilan sistem

Persamaan (12), (13) dan (14) dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -2,90968 y_1 \\ \dot{y}_2 &= 2,90968 y_1 - 2,90968 y_2 \\ \dot{y}_3 &= 2,90968 y_2 - 2,90968 y_3 \end{aligned} \quad (15)$$

Titik kesetimbangan terjadi pada $\dot{y}_1 = 0$, $\dot{y}_2 = 0$ dan $\dot{y}_3 = 0$. Apabila dicari dengan perhitungan $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ dan $y_3 = 0$.

Persamaan (15) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,90968 & 0 & 0 \\ 2,90968 & -2,90968 & 0 \\ 0 & 2,90968 & -2,90968 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

misalkan

$$A = \begin{bmatrix} -2,90968 & 0 & 0 \\ 2,90968 & -2,90968 & 0 \\ 0 & 2,90968 & -2,90968 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -24,63404$$

Karena determinan A tidak sama dengan nol maka A matriks non singular. Untuk mencari kestabilan sistem ditentukan dengan mencari matriks definit positif P yang memenuhi kondisi berikut,

$A^T P + PA = -Q$, dengan Q adalah matrik real definit positif.

Dipilih matriks Q adalah matriks sebagai berikut,

$$Q = \begin{bmatrix} 5,81936 & 0 & -2,90968 \\ 0 & 5,81936 & 0 \\ -2,90968 & 0 & 11,63872 \end{bmatrix}$$

Misal matriks $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$

$$A^T P + PA = -Q$$

Matriks P yang memenuhi persamaan $A^T P + PA = -Q$ dengan Q adalah matriks seperti disebut sebelumnya adalah

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nilai Eigen dari matriks P adalah

$$\lambda_1 = 0,02465, \lambda_2 = 0,03136 \text{ dan}$$

$$\lambda_3 = 0,06921$$

Oleh karena itu matriks P adalah matriks definit positif.

Karena dapat ditentukan matriks P yang definit positif dan memenuhi kondisi $A^T P + PA = -Q$ maka sistem pada persamaan (12), (13) dan (14) stabil.

7. KESIMPULAN

Prinsip kerja *polyvascular clepsydra* adalah membuat aliran air pada bejana terakhir konstan. Hal ini akan diperoleh apabila ketinggian air pada bejana terakhir konstan. Berdasarkan pembahasan tentang model matematika untuk jam air jenis *polyvascular clepsydra*, semakin banyak bejana yang digunakan akan semakin lama aliran air konstan. Waktu yang diperlukan agar air mencapai suatu ketinggian tertentu berbanding lurus dengan perkalian antara jumlah bejana, selisih tinggi mula-mula dengan ketinggian diinginkan yang dipangkatkan satu per jumlah bejana, pangkat dua dari jari-jari bejana, koefisien viskositas zat dan panjang pipa tempat mengalirnya air. Serta waktu berbanding terbalik dengan perkalian bilangan natural (e), pangkat empat dari jari-jari pipa, massa jenis zat dan percepatan gravitasi. Pada titik kesetimbangan model yang diperoleh stabil.

8. SARAN

Prinsip kerja *polyvascular clepsydra* dapat digunakan pada PT Sidatama untuk membuat frekuensi membuka dan menutupnya kran otomatis berkurang. Dengan berkurangnya frekuensi ini diharapkan kran otomatis lebih tahan lama.

Penelitian lebih lanjut tentang *polyvascular clepsydra* dengan kasus inviscid (viskositas diabaikan) dapat dilakukan untuk *polyvasclar clepsydra* dengan pipa berdiameter besar.

9. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Anonim, "Poiseuille's Law", http://en.wikipedia.org/wiki/Poiseuille%27s_law, diakses tanggal 3 Oktober 2007
- [2]. Anonim, "Viscosity", <http://en.wikipedia.org/wiki/viscosity>, diakses tanggal 3 Oktober 2007
- [3]. Anonim, "Viscosity", <http://wiki.xtronics.com/index.php/Viscosity>, diakses tanggal 3 Oktober 2007

- [4]. Anonim, "Sejarah Jam Air", www.pikiran-rakyat.com/cetak/0103/12/1007, diakses tanggal 20 September 2007
 - [5]. Anton H. (1987), "*Aljabar Linear Elementer*", Edisi Kelima, Erlangga, Jakarta.
 - [6]. Giancoli (2001), "*Fisika*", Edisi Kelima, Jilid 1, Erlangga, Jakarta.
 - [7]. Gitton, "*The Theory of Operation of a Time-Flow Clock*", www.marcdatabase.com/~lemur/dm-gitton.html#gitton-hj, diakses tanggal 28 September 2007.
 - [8]. Goodenow. J, ORR. R, Ross. D, "*Mathematical Models of Water Clocks*", www.rit.edu/~dansma/GoodenowOrrRossWaterClocks, diakses tanggal 15 Juli 2007
 - [9]. Hyperphysic, "*Poiseuille's Law Calculation*", <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/poicon.htm/>, diakses tanggal 3 Oktober 2007
 - [10]. Katsuhiko O. (1995), "*Discrete-Time Control System*", Second edition, Prentice Hall, New Jersey.
 - [11]. Lynch. N, "*Time Synchronization*", Massachusetts Institute of Technology (2006), <http://www.courses.csail.mit.edu/6.885/spring06/notes/lect6.pdf>, diakses tanggal 28 September 2007.
 - [12]. Purcel, dkk (1987), "*Kalkulus dan Geometri Analitis*", Erlangga:Jakarta.
 - [13]. Ross S. L. (1984), "*Differensial Equations*" Third Edition, John Wiley and Sons: Singapore.
 - [14]. Weisstein. E. W, "*Taylor Series*", Mathworld, <http://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html>, diakses tanggal 3 Oktober 2007
 - [15]. Zemansky. S. (1962), "*Fisika untuk Universitas 1, Mekanika. Panas. Bunyi*", Bina Cipta:Jakarta.
-